

$\mathbb{K}$: algebra lineare

$\mathbb{R}$: prod. scalare definito positivo $\rightarrow$ possibilità di costruire basi ortonormali.

In $\mathbb{Q}^2$ non esiste alcun vettore proporzionale ad $(1,1)$ e di norma euclidea 1 $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \notin \mathbb{Q}^2$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{annulla col.} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

$\mathbb{C}$ campo complesso.

Consideriamo lo sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dalle matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$V_2 = \mathcal{L}([10], [01])$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in V_2 \Rightarrow \det A = a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tutte le matrici $\neq \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in V_2 sono invertibili.

Siano adesso $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix} \in V_2 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' - bb' & ab' + a'b \\ -ba' - b'a & -bh' + aa' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} aa' - bb' & ab' + a'b \\ -ba' - b'a & -bh' + aa' \end{bmatrix} \in V_2$$

In V_2 è definita una somma ed un prodotto.

Poi se ho il prodotto $V_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è un gruppo.

Valgono anche le prop distributive (perché valgono sempre per + e . fra matrici).

$\Rightarrow (V_2, +, \cdot)$ è un corpo.

Osserviamo che $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow$ Il prodotto in $(V_2, +, \cdot)$ è commutativo.

$$\begin{aligned} & \left(\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\alpha' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ & = \alpha \alpha' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \beta' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \beta' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \beta' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \dots \\ & = \left(\alpha' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

V_2 è un campo

è uno sp. vettoriale di $\dim = 2$ su $\mathbb{R}$

con base $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

pongo $1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, i := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Scrivo gli elementi di V_2 come c. lineari di
 $1, i$

$\mathcal{C}$ campo che corrisponde a quello costruito
sopra.

$$\alpha 1 + \beta i \in \mathcal{C}$$

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

posso sempre identificare $\mathbb{R}$ con il sottocampo di
 $\mathcal{C}$ generato da 1

$$\alpha \in \mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$$

$$\psi(\alpha \cdot \beta) = \psi(\alpha) \cdot \psi(\beta).$$

$$\alpha \mathbf{1} + \beta i \approx \alpha + \beta i$$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

$$(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha'\beta + \beta'\alpha).$$

$$(\alpha + \beta i)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha - \beta i)$$

$$(\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$$

$${}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

DATI $x, z \in \mathbb{C} \quad {}^T(xz) = {}^T x {}^T z$

Similmente la trasposta della somma di 2 matrici è la trasposta della somma delle trasposte.

$${}^T(x+z) = {}^T x + {}^T z$$

" ${}^T(\dots)$ " è un automorfismo di $\mathbb{C}$.

In generale esso si chiama coniugio e si scrive

$$\overline{x} = \overline{\alpha + \beta i} \Rightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\alpha + \beta i} = \\ = \alpha - \beta i$$

con la barra:

$$m_2 \quad \overline{i} = -i \Rightarrow x = \alpha + i\beta \Rightarrow \overline{x} = \alpha - i\beta.$$

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\begin{aligned} \text{N.B.} \quad x \overline{x} &= (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{-1} = \frac{\overline{x}}{x \overline{x}}} \quad x \neq 0$$

$\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$ $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ ammette soluzioni

$$x = \pm i$$

Il campo complesso $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
(verremo fondamentalmente dell'algebra).

Sia $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un qualsiasi polinomio in x a coeff.
in $\mathbb{C}$. ~~non~~ avere deg $f(x) > 0 \Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{C} : f(\xi) = 0$.

CONSEGUENZA: ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $\deg f(x) = d > 0$
 ammette in $\mathbb{C}$ esattamente d radici: contate
 con la debita molteplicità.

$(x-1)^2$ ammette come radice $+1$
 contata 2 volte.

DIM: per il teorema fondamentale dell'algebra

$$f(x) = f(\xi) = 0 \Leftrightarrow (x-\xi)g(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \deg g(x) = d-1$$

Il teorema vale per $d=1$ $ax+b=0$ con $a \neq 0$

ammette una soluzione (ed una sola).

$\Rightarrow$ usando (*) supponiamo valga per ogni polinomio di
 grado $d-1$. Se $f(x) = (x-\xi)g(x)$ con $\deg g(x) = d-1$ ha $d-1$

$\Rightarrow f(x) = (x-\xi)g(x)$ con $\deg g(x) = d-1 \Rightarrow g(x)$ ha $d-1$
 soluzioni $\Rightarrow f(x)$ ha d soluzioni $\square$

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

osserviamo che $z \in \mathbb{C}$ è anche un elemento di $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow z = \alpha \mathbb{1} + \beta i \quad \text{con } \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \alpha \mathbb{1} + \beta i = \alpha \mathbb{1} - \beta i = \bar{z}$$

ovvero l'insieme che rappresenta $\mathbb{R}$ è simmetrico.

$$z + \bar{z} = 2\alpha \mathbb{1} \approx 2\alpha \quad \operatorname{Re}(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$z - \bar{z} = 2i\beta \quad \operatorname{Im}(z) := (-i) \frac{z - \bar{z}}{2} = \beta \in \mathbb{R}.$$

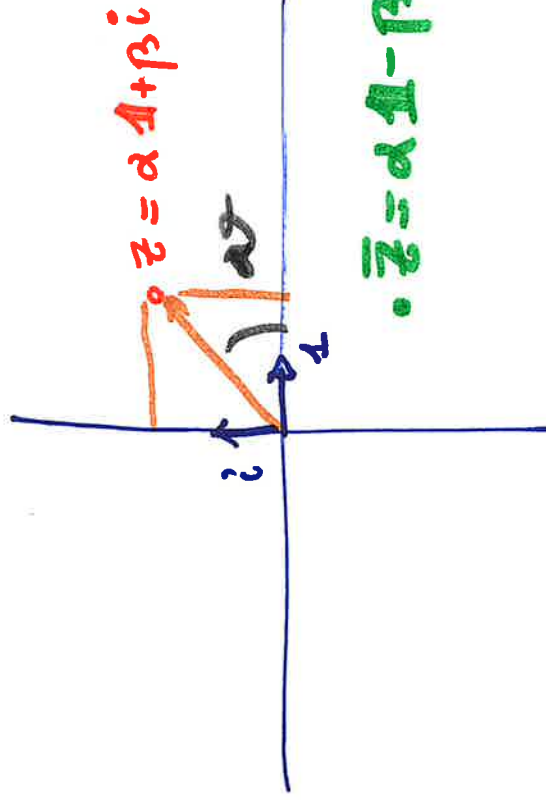
$$\text{se } z \in \mathbb{R} \dots \quad z \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 = \|\alpha, \beta\|^2 \geq 0$$

Definisco come $|\bar{z}| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \in \mathbb{R}$

N.B.: Se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = |z|$.

oss.: $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$



identifichiamo
i numeri reali
con quelli complessi
del tipo $\alpha \mathbb{1}$
e dividiamo immaginario:
puri i numeri
complessi del tipo βi .

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} = |z|$$

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow e^x$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\cos x} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

$$(i)^{2n+1} = i(i)^{2n} = i(-1)^n$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$z = \alpha + i\beta = |z| e^{i\varphi}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$x = \pi \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

DIAGONALIZZAZIONE, AUTOVALORI E AUTOVETTORI.

Mettiamoci in $V_n(\mathbb{K})$

$f: V_n(\mathbb{K}) \rightarrow V_n(\mathbb{K})$ lineare

possiamo sempre trovare una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

e scrivere la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$. $\rightarrow A$

Se $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ è un'altra base di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

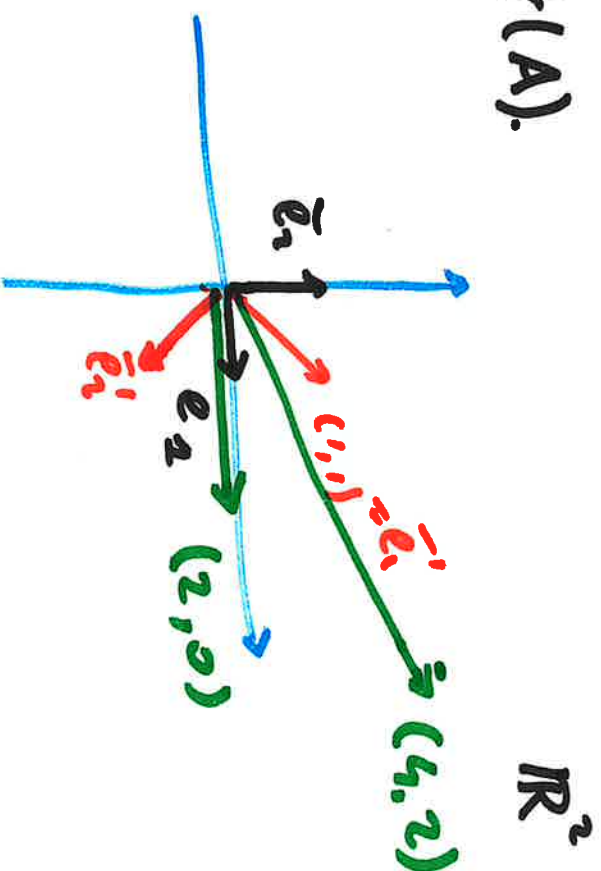
la matrice A' di f rispetto a $\mathcal{B}'$ avrà forma

$$\boxed{A' = P^{-1} A P} \quad \text{con } P \in GL(n, \mathbb{K})$$

matrice di cambiamento di base.

Si A' che A rappresenta f .

- A' ed A hanno lo stesso rango.
- $\det(A') = \det(A)$.



$$\begin{aligned} \bar{e}_2 &= (2, 0) \\ \bar{e}_1 &= (0, 1) \end{aligned}$$

$$f((x, y)) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x + y, x + 2y)$$

$$\bar{e}_1' = (1, 1)$$

$$\bar{e}_2' = (4, -1)$$

$$f((1, 2)) = (3, 3) \quad f((1, -1)) = (1, -1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dati f trovare le direzioni tangenti a f in x se x è steno

→ Trovare $\vec{x} \neq \underline{0}$ tale che $f(\vec{x}) \in L(\vec{x})$

$$\underline{f(\vec{x}) = \alpha \vec{x}}$$

Se f descritte da A rispetta una base $B \Rightarrow$

$$f(\vec{x}) = \alpha \vec{x} \quad \vec{x} \neq \underline{0}$$

equivalente a dire

$$(*) \quad \exists \alpha \quad A X = \alpha X \quad \text{per qualche } \alpha.$$
$$X \neq \underline{0}$$

(*) corrisponde a dire che $\exists \underline{X} \neq \underline{0}$ $\exists a \in \mathbb{K}$

tale che

$$AX - \alpha IX = \underline{0}$$

$$(*)' \quad \underline{(A - \alpha I)X = \underline{0}}$$

$(A - \alpha I)$ è una matrice quadrata.

se $\text{rk}(A - \alpha I) = n$ cioè $\det(A - \alpha I) \neq 0$

allora il sistema è di ordine $\Rightarrow$ l'unico soluzione
 $X = \underline{0}$

ma non ci piace.

se invece $\det(A - \alpha I) = 0 \Rightarrow \text{rk}(A - \alpha I) < n \Rightarrow$

esistono almeno $\infty^{n - \text{rk}(A - \alpha I)} \geq \infty^4$ soluzioni

$\Rightarrow \exists \underline{X} \neq \underline{0}$ tale che $(A - \alpha I)X = \underline{0}$.

Def: Sia $f: V_n(K) \rightarrow V_n(K)$ lineare.

Un vettore $\bar{x} \neq \underline{0}$ è detto autovettore per f di autovalore λ se e solo se $f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$.

Sia $A \in M^{n,n}_K$ una matrice quadrata; $X \neq \underline{0}$ è detto autovettore per A di autovalore λ se e solo se
$$AX = \lambda X$$

In particolare $\bar{X}$ autovettore di $A \Leftrightarrow \bar{X}$ è autosoluzione di autovalore λ
($\bar{X} \neq \underline{0}$)

di
$$(A - \lambda I)X = \underline{0}$$

$(A - \lambda I)X = \underline{0}$ ammette autosoluzioni $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Il polinomio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

è detto polinomio caratteristico di A

e l'equazione $p_A(\lambda) = 0$ è detta equazione
caratteristica di A .

I possibili autovalori di A sono le radici della
equazione caratteristica.

In particolare se $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$

$V_\lambda := \ker(A - \lambda I)$ è detto autospazio di autovalore

λ . Esso contiene 0 e tutti e soli gli
autovalori di A di autovalore λ .

Si dice moltiplicità geometrica di λ il
valore

$$m_g(\lambda) := \dim V_\lambda = \\ = \dim \ker(A - \lambda I) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$$

N.B. $m_g(\lambda) \geq 1$.

Def: Si dice Spettro di A l'insieme di tutti
gli autovalori di A . (congiunti con molteplicità)

$$\text{Spec}(A) = \{ \lambda : \det(A - \lambda I) = 0 \}.$$

A GLI AUTOVALORI DIPENDONO DALLA FUNZIONE f

RAPPRESENTATA DA A . La matrice A dipende
dalla base fissata. In particolare le componenti degli

autovetori dipendono da A .

Proposizione: Due matrici simili hanno gli stessi autovetori e le stesse molteplicità geometriche per essi.

Dim: Sia $B = P^{-1}AP \Rightarrow \det(B - \lambda I) =$

$$= \det(P^{-1}AP - \lambda I) =$$

$$= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) =$$

$$= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] =$$

$$= \det P \cdot \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico $\Rightarrow$ stessi autovetori.

$$\begin{aligned} \text{rk}(P - \lambda I) &= \text{rk}(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \\ &= \text{rk}[P^{-1}(A - \lambda I)P] \end{aligned}$$

ma P invertibile

$$\begin{aligned} \Rightarrow &= \text{rk}[P^{-1}(A - \lambda I)] = \\ &= \text{rk}[A - \lambda I]. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dim V_{\lambda} \text{ rispetto ad } A =$$

$$\dim V_{\lambda} \text{ rispetto a } B \quad \square$$

Def: Si dice moltiplicità algebrica di $\lambda \in \text{Spec}(A)$ il numero di volte che λ compare come radice dell'equazione caratteristica.

Def: Una matrice A è detta diagonalizzabile se e solo se $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$D = P^{-1}AP \text{ con } D \text{ diagonale.}$$

Oss: A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori per A

Dim: $D = P^{-1}AP$ è equivalente a dire $PD = AP$ con P matrice invertibile e dunque

$$P = [c_1 \dots c_n]^T \text{ le colonne } c_1 \dots c_n \text{ sono una base di } \mathbb{K}^n.$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow PD = [\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n]$$

$$AP = [\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n]$$

$$\Rightarrow PD = AP \Leftrightarrow \lambda_i c_i = A c_i \quad \forall i$$

$\Leftrightarrow c_i$ è autovettore di A $\forall i$
(di autovalore λ_i).

Un endomorfismo $f: V \rightarrow V$ è diagonalizzabile

$\Leftrightarrow \exists$ una base di V formata da autovettori per f .

A $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$ NON $PA = PD \Rightarrow A = D$

~~$AP = DP$~~

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(A)} V_{\lambda} = \mathbb{K}^n$

$$V_{\lambda} \subseteq \mathbb{K}^n$$

Teorema: Gli auto-spazi di A sono sempre in somma diretta.

$$\text{Conserviamo: } \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(A)} V_{\lambda} = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \dim V_{\lambda} = n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_{\lambda}(A) = n$$

Teorema: $\forall \mathfrak{X} \in \text{Spec}(A) : 1 \leq m_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) \leq m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) \leq n$

conseguenza:

$$\sum m_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = n \iff$$

$$\sum m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = n \text{ \& } m_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) \forall \mathfrak{X}.$$

perché in generale $\sum m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) \leq n$ e dunque

$$n = \sum m_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) \leq \sum m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) \leq n$$

$$\Rightarrow \sum m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = n \text{ \& } m_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) \forall \mathfrak{X}.$$

Def: Un anello $R \in \text{Spec}(A)$ è detto regolare se $m_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$.